CARLO COSMELLI

PRINCIPI DI FISICA

(PER FILOSOFI)

CAPITOLO 2

MECCANICA CLASSICA

08/03/2019 14:52:13

CARATTERI: PDF 70691 + SF2-SF3(8648 + 9068)

"Hypotheses non fingo" (I. Newton)

2.1. La Meccanica Classica: introduzione

2.2 Il primo principio della dinamica: Il principio di inerzia

2.2.1 Definizione di velocità

2.2.2 Definizione di forza

2.2.3 Rispetto a quale sistema di riferimento sono misurate le velocità?

2.2.4 Un altro modo di scrivere il primo principio

SCHEDA FILOSOFICA # 2. SPAZIO, MOVIMENTO NATURALE E INERZIA[1]

2.3 Il secondo principio della dinamica

2.3.1 Definizione classica di "m"

2.3.2 Come leggere F=ma

[1] [Da inserire dopo la trattazione del principio di inerzia, o alla fine del capitolo sulla Meccanica.]

* Da inserire alla fine del capitolo sulla *Meccanica*.

2.1. La Meccanica Classica: introduzione

La meccanica classica è la parte della Fisica che si basa sui principi della Meccanica enunciati da Galileo, Newton, sviluppati successivamente con l'utilizzo del calcolo infinitesimale e le elaborazioni analitiche applicate ai principi della dinamica, principalmente da parte di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Siméon-Denis Poisson (1781–1840) e William R. Hamilton (1805-1865). Di base la meccanica classica descrive il moto di oggetti con massa, sottoposti a forze. In particolare si parla di corpi rigidi: sfere, sbarre, proiettili, corpi celesti ed altri oggetti la cui descrizione non creava grossi problemi matematici (il moto dei fluidi necessita di una trattazione più complessa), sottoposti essenzialmente solo alla forza di gravità, l'unica forza fondamentale nota fino al XVIII secolo. Gli sviluppi successivi saranno la meccanica dei fluidi, il comportamento dei gas e degli oggetti "caldi" o "freddi", che darà origine alla Termodinamica, e gli sviluppi dell'elettromagnetismo che, introducendo forze di natura elettrica e magnetica, costituiranno il corpo della cosiddetta "Fisica classica".

In quasi tutti i libri di testo si trattano in capitoli diversi le leggi della meccanica con la forza di gravità (che si esercita fra le masse dei corpi) e le leggi dell'elettromagnetismo (in cui la forza elettrostatica si esercita fra le cariche elettriche dei corpi). In realtà è solo una questione storica. Una volta introdotto il concetto di "forza", e una volta che si sia scritta formalmente l'espressione della forza (sia gravitazionale o elettrica), non c'è nessuna differenza su come debba utilizzare questa forza per ricavarne il comportamento del corpo. Tuttavia in questo testo tratteremo l'elettromagnetismo dopo la Meccanica e la Termodinamica per semplicità e per uniformità con quello che si trova altrove.

Alla fine del XIX secolo sorgeranno poi alcuni fatti inspiegabili ed alcune incongruenze che daranno origine a due nuove teorie: la due teorie della Relatività: la Relatività speciale (1905) che risolverà le incongruenze dell'elettromagnetismo ed i problemi legati al moto di corpi in moto molto "veloce". E la Relatività Generale (1915) che darà una nuova visione degli effetti dovuti alla presenza di masse nello spazio. I problemi legati alla descrizione degli effetti in corpi molto piccoli, di dimensioni atomiche, verranno invece affrontati e risolti dalla Meccanica Quantistica in un percorso che, iniziato nel 1900, troverà la sua prima formalizzazione nel 1927, ma che ancora oggi continua ad essere modificata e migliorata in seguito a nuovi risultati sperimentali e nuove elaborazioni teoriche.

2.2. Il primo principio della dinamica: Il principio di inerzia

Il primo principio della dinamica ci dice cosa succede se un corpo è libero, cioè se ad esso non è applicata alcuna forza (esterna).

Un corpo non soggetto a forze esterne ha velocità costante (in un SdR inerziale[2])

$$\bar{F}_e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v} = \text{costante}$$

L'oggetto di cui si parla è un **corpo, un oggetto materiale,** per il momento approssimato ad un oggetto simmetrico e "piccolo", una pallina, tanto per fissare le idee[3].
E' necessario definire due termini: la "velocità" e la "forza".

2.2.1. Definizione di velocità

La velocità **v** ci dà una misura di quant'è lo spazio percorso dal corpo in un certo tempo, cioè di quanto "velocemente" il corpo si sta spostando, ed anche della direzione in cui si sta muovendo (la

[2] Attenzione questo può essere un loop logico, lo vedremo meglio in seguito.
[3] La formulazione più corretta è parlare di "punto materiale", cioè di qualcosa che non ha estensione, pur possedendo una massa

velocità è un vettore). In formule, e per un moto in una sola direzione, per esempio la x, abbiamo[4]:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Nota 1: la velocità dipende dal sistema di riferimento: è calcolata infatti tramite misure di posizione **(x)** e di tempo **(t)**, che dipendono dal sistema di riferimento rispetto a cui si fa la misura.

♦ **La velocità è una grandezza relativa al sistema di riferimento in cui viene misurata.**

La velocità è un vettore, cioè è definita da tre numeri (v_x v_y v_z) oppure da un modulo (v) , che ci dice "*quanto* è grande" la velocità, con una unità di misura (nel Sistema Internazionale: metri al secondo) e da un versore ($\hat{v}$) che indica la direzione della velocità nello spazio.

$$\bar{v} = v \cdot \hat{v}\ (m/s)$$

Il primo principio ci dice che se non ho forze esterne la velocità non cambia **né in modulo né in direzione:**

$$\overline{F}_e = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{v} = v \cdot \hat{v} = \text{costante} \Rightarrow \begin{cases} v = \text{costante: non cambia il modulo} \\ \boldsymbol{e} \\ \hat{v} = \text{costante: non cambia la direzione} \end{cases}$$

Nota 2: Un corpo che si muove con velocità costante si muove di moto rettilineo uniforme.

Nota 3: Una velocità costante può essere anche uguale a zero. Il primo principio della dinamica è valido sia se $v = 0$ (ossia se il corpo è fermo), sia se $v \neq 0$ (ossia se il corpo è in movimento), purché ovviamente tale velocità sia costante nel tempo. Un corpo fermo, quindi con velocità zero, è un caso particolare di moto rettilineo uniforme.

2.2.2. Definizione di forza

Possiamo chiamare forza (o, meglio, "interazione") qualunque causa che produca una variazione dello stato di un corpo (definito dalla sua posizione nello spazio al variare del tempo). Con variazione dello stato si intende l'accezione più generale possibile. Quindi, nell'ipotesi di applicare una forza esterna al corpo:

1) Se il corpo, supposto puntiforme, sta fermo, allora comincia a muoversi con una certa velocità.
2) Se il corpo, supposto puntiforme, si sta muovendo la sua velocità viene variata, o in modulo, oppure in direzione.
3) Se il corpo è esteso, ma è bloccato da qualche vincolo, allora si deforma, cioè si "dilata" o "accorcia", a seconda che la forza sia una trazione o una compressione, poi può anche muoversi…

Nota: per variazione dello stato non si intende una variazione dello "stato termico", cioè dei parametri (p, V, T) = (pressione, Volume, Temperatura) che definiscono lo stato termodinamico del sistema (vedi la parte sulla Termodinamica).

Quando si parla di *forze*, o meglio di *interazioni*, si potrebbe pensare che le forze (interazioni) possibili sono molte, che magari esistono forze che non conosciamo e di cui non sappiamo nulla. Non è così. Oggi sappiamo, nel senso che abbiamo verificato sperimentalmente, che le interazioni che coinvolgono qualunque oggetto del nostro universo sono solo quattro:

- Due interazioni a corto raggio, che cioè agiscono solo per distanze molto minori di quelle atomiche, e che quindi sono nulle all'esterno degli atomi

1) L'interazione forte, una forza attrattiva che si esercita fra protoni e neutroni e che spiega come

[4] Vedi anche 2. Nota matematica

mai i nuclei non "esplodono". Il raggio tipico di questa interazione è di circa 10^{-15} m.

2) L'interazione debole, che spiega i decadimenti radioattivi, ha un raggio di circa 10^{-17} m.

- Due interazioni a lungo raggio, che cioè continuano ad agire anche a grandi distanze, ma diventando sempre più deboli.
  3) L'interazione gravitazionale, la forza di attrazione che si esercita fra corpi con massa.
  4) L'interazione elettromagnetica, una forza che può essere attrattiva o repulsiva e che si esercita fra i corpi dotati di una carica elettrica diversa da zero.
  Entrambe queste due interazioni dipendono da $1/R^2$, e diminuiscono rapidamente per oggetti lontani.

Quindi per qualunque oggetto *macroscopico* abbiamo solo due forze da considerare, quella gravitazionale e quella elettromagnetica, che hanno una sorgente ben precisa: dei corpi con massa o dei corpi con carica elettrica.

2.2.3. Rispetto a quale sistema di riferimento sono misurate le velocità?

Il sistema deve essere un SdR inerziale, definito spesso come un sistema in cui vale il Primo Principio della dinamica.

Attenzione! Questo è un possibile loop logico: definire il primo principio come un'asserzione che vale in un sistema inerziale, definendo poi il sistema inerziale come quello in cui vale il primo principio!

Soluzione 1: si utilizza l'informazione **sperimentale** che **tutte le interazioni conosciute** o sono nulle a distanze maggiori di quelle interatomiche (le interazioni deboli o forti) o vanno a zero, cioè si annullano se aumenta a sufficienza la distanza fra i corpi che interagiscono (le interazioni gravitazionali e quelle elettriche diminuiscono con l'inverso del quadrato della distanza)[5].

Quindi se considero un corpo abbastanza lontano da altri corpi (per esempio un corpo nello spazio inter-galattico) posso supporre con ottima approssimazione che le forze esterne agenti sul corpo siano nulle o assolutamente trascurabili[6], e posso fare un test per vedere se il sistema di riferimento che sto considerando sia o no inerziale.

Tanto per avere un'idea: si consideri che la distanza media fra due stelle è dell'ordine di 10^{16} m, cioè circa $0{,}3 \cdot 10^8$ anni luce. A questa distanza una stella che avesse una massa 1'000 volte maggiore di quella del Sole[7] attirerebbe una massa di 1 kg con una forza equivalente (supponendo di stare sulla Terra, quindi con accelerazione di gravità g) pari a 0,1 milionesimo di grammo $= 0{,}1 \cdot 10^{-6}\ g$, oppure un decimiliardesimo di kg $= 0{,}1 \cdot 10^{-9}\ kg$, quindi praticamente trascurabile.[8]

----

[5]Per vedere uno schema delle quattro interazioni esistenti vedi la Scheda alla fine della parte sulla Meccanica classica.

[6]Per chiarirsi le idee su come si risolve questo loop logico vedi p.e. "La Fisica di Berkeley", Vol. I, Meccanica, cap.3, par.1-5. Per una descrizione operativa sui sistemi inerziali vedi: P.W. Bridgman, *Am. J. Phys.*, 29, **32**, (1961).

[7]La più grande Stella conosciuta (La stella R136a1 nella Grande Nube di Magellano) ha una massa che è circa 250 volte quella del Sole.

[8] Il calcolo è questo: $M_{sole} \sim 2 \cdot 10^{30}\ kg$; $F = G\frac{1000\ M_s \cdot m}{R^2} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\frac{1000 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1}{10^{32}} \sim 1{,}4\ \cdot 10^{-9}\ \ N$ corrispondente ad una massa (sulla Terra) $=1{,}4\ \cdot \frac{10^{-9}}{9{,}8} \approx 0{,}1 \cdot 10^{-9}\ \ kg$

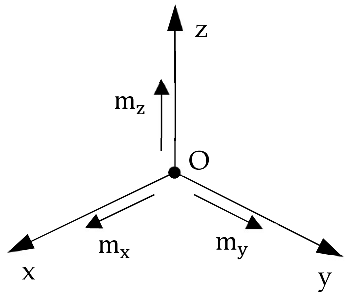


Fig. 2.5 Schema di un sistema di riferimento – cartesiano – su cui fare un test su tre masse lanciate rispettivamente nella direzione dei tre assi (x,y,z), ed una per volta, per verificare se il sistema sia o no inerziale. Il sistema di riferimento sia abbastanza lontano da ogni sorgente di Forza per supporre che la forza esterna totale sia nulla. Le te masse dovranno quindi muoversi di moto rettilineo uniforme, quindi con velocità costante, lungo i tre assi cartesiani.

Test sperimentale per vedere se mi trovo in un SdR inerziale [vedi fig. 2.5]: prendo tre masse m_x m_y m_z che vengono lanciate – una per volta - con v_x , v_y , $v_z \neq 0$ a partire dall'origine e in direzione dei tre assi x,y,z.

Se le tre masse mantengono costante la loro velocità in direzione e modulo allora il sistema di riferimento è inerziale. Si potrebbe obiettare che il test è in pratica irrealizzabile perché la situazione sperimentale di porre solo un sistema di riferimento nello spazio intergalattico non ha senso, tuttavia questo test può essere fatto anche in presenza di Forze esterne, purché note, per esempio sulla Terra dove è presente la forza di gravità. E' sufficiente tener conto del moto che avrebbe il corpo se le forze fossero nulle. Sembra macchinoso, ma l'importante è di prevedere una procedura non ambigua per tener conto di eventuali forze esterne, se poi i calcoli saranno molto complicati, questo è un altro problema. E' quello che faceva Galileo quando lanciava le sue sfere su di un tavolo molto liscio e orizzontale: il fatto di operare in direzione orizzontale gli permetteva di asserire che la forza di gravità, che si esercitava in direzione verticale, non influiva sul moto orizzontale del corpo, che quindi risultava "libero", a parte la forza di attrito su cui appunto Galileo faceva le sue osservazioni.

Quindi l'assunzione fatta è che **esiste almeno un SdR inerziale**, che per il momento – cioè se vogliamo descrivere il moto di qualunque corpo sulla Terra o all'interno del sistema solare - possiamo indentificare come un SdR che ha l'origine nel Sole e gli assi diretti secondo le Stelle fisse.

Soluzione 2 (complicata): Per un sistema di riferimento qualsiasi lo spazio è inomogeneo e anisotropo. Si pensi ad esempio ad un sistema di riferimento ruotante (quello solidale ad una giostra in movimento per esempio). Un corpo al centro sarebbe fermo, mentre un corpo in un punto qualunque della piattaforma – non sottoposto ad alcuna forza esterna – non potrebbe essere sempre in quiete: anche se la sua velocità fosse nulla ad un certo istante, comincerebbe a muoversi all'istante successivo, per lui lo spazio non sarebbe omogeneo. Analogamente il tempo sarebbe inomogeneo. *Ma si può trovare sempre un sistema di riferimento rispetto al quale lo spazio è omogeneo e isotropo e anche il tempo è omogeneo*[9]. Un sistema di questo genere lo chiamiamo *inerziale*.

In un sistema inerziale quindi un corpo libero in quiete in un certo istante, resta in quiete infinitamente a lungo.

Il punto è di aver definito l'esistenza di almeno un sistema in cui lo spazio e il tempo sono omogenei e isotropi. Applicando poi queste caratteristiche dello spazio e del tempo alle leggi generali della

---

[9] Lev. D. Landau, Evgenij M. Lifsic, Meccanica (Boringhieri, 1971), pag. 14. Il punto non è per nulla banale, come in tutti i libri di Landau vengono detti in poche righe concetti fondamentali, spesso non ovvi.

meccanica[10] risulta che in un sistema inerziale la velocità di un corpo non soggetto a forze è costante[11].

2.2.4 Un altro modo di scrivere il primo principio

Come già detto, l'accelerazione $\bar{a}$ ci dice come varia la velocità al variare del tempo:

$$\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}(t_2) - \bar{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Il primo principio afferma che un corpo non soggetto a forze esterne ha velocità costante. Se la velocità è costante allora $\bar{v}_2 = \bar{v}_1$ e la variazione di velocità sarà nulla: $\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = 0$

Quindi: $\bar{a} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1}$ da cui: $\bar{a} = 0$

Primo Principio della dinamica riscritto: Un corpo non soggetto a forze esterne ha accelerazione nulla:

$$\bar{F}_e = 0 \leftrightarrow \bar{a} = 0$$

2.3 Il secondo principio della dinamica

Il secondo principio della dinamica ci dice cosa succede se la somma delle forze applicate a un corpo è diversa da zero:

$$\bar{F}_e = m \cdot \bar{a} \quad \text{(la scriveremo meglio, così non va sempre bene)}$$

La somma delle forze esterne applicate ad un corpo è uguale al prodotto della massa del corpo per la sua accelerazione.

I termini di cui si parla: l'oggetto cui si riferisce la formula è un singolo corpo (oggetto), per il momento simmetrico e con estensione nulla. Una piccola sfera tanto per fissare le idee.

- $\bar{F}_e$ è la somma delle forze (esterne) che agiscono sul corpo in esame.
- $\bar{a}$ è l'accelerazione del corpo.
- m è la sua massa.

Le forze esterne e l'accelerazione **devono** essere misurate rispetto ad un sistema inerziale, la massa (per ora) è una grandezza indipendente dal sistema di riferimento in cui la si misura.

2.3.1 Definizione classica di "m"

La massa è una proprietà che posso associare ad ogni corpo, quindi ogni corpo ha una massa "m".

---

[10] Si sta parlando della Lagrangiana del sistema, ma questo va oltre gli scopi di questo libro.
[11] Si noti che questo modo di ragionare implica un rivolgimento delle ipotesi iniziali: si scrivono le leggi generali del moto con alcune ipotesi. Si impone l'esistenza di un sistema inerziale. Se ne deduce la legge di inerzia.

La massa è proporzionale alla quantità di materia di cui è composto il corpo[12] – è quindi proporzionale al numero di atomi, cioè di elettroni, protoni e neutroni che compongono il corpo.

La massa è *anche* una misura dell'inerzia del corpo, cioè della difficoltà a spostare il corpo, a variarne la sua velocità[13].

In meccanica classica la massa di un corpo è costante, se non intervengono "azioni" verso l'esterno o dall'esterno. Ma, attenzione, un corpo può "perdere" massa verso l'esterno (la macchina che consuma benzina) o acquistare massa dall'esterno (la valanga...).

2.3.2 Come leggere F=ma

1) L'accelerazione a è proporzionale alla $\mathrm{F_e}$ (e viceversa), $\mathrm{a} = \frac{\mathrm{F_e}}{\mathrm{m}}$.

Proporzionale vuol dire che se raddoppio la forza raddoppierà l'accelerazione. Viceversa, se l'accelerazione si dimezza, vuol dire che è stata impressa una forza che è la metà.

2) La relazione è vettoriale: $\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{m} \cdot \bar{\mathrm{a}}$, quindi l'uguaglianza non è solo fra i moduli (i "numeri" di sinistra e quelli di destra), ma anche fra i versori (la "direzione" del vettore a sinistra e di quello a destra).

- Scrivere: $\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{m} \cdot \bar{\mathrm{a}}$ equivale a scrivere $\mathrm{F} \cdot \hat{\mathrm{F}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a} \cdot \hat{\mathrm{a}}$

Il che equivale a scrivere due relazioni che devono essere contemporaneamente vere:

1) $\mathrm{F} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{a}$ e 2) $\hat{\mathrm{F}} = \hat{\mathrm{a}}$ (direzione di F = direzione di a*)*

3) Scriviamo la relazione utilizzando la definizione di accelerazione in funzione della variazione di velocità: $\bar{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}$. Quindi posso scrivere: $\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}}$. Questa relazione è vera, ma solo se si suppone che la massa m rimanga costante durante il moto, cosa che non è sempre vera. Per considerare anche il caso in cui m possa variare portiamo m "dentro" la variazione (è un'operazione matematica che si può fare). Avremo quindi:

$\bar{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{m} \cdot \bar{\mathrm{v}})}{\mathrm{dt}}$ questo è già un passo avanti, ma si può fare di meglio.

2.3.2 Definizione di impulso

L'impulso, o la quantità di moto di un corpo, è il prodotto della sua massa per la sua velocità, è un vettore che ha la stessa direzione di $\hat{\mathrm{v}}$, e il modulo uguale al prodotto $\mathrm{m} \cdot \mathrm{v}$.

$$\bar{\mathrm{p}} = \mathrm{m} \cdot \bar{\mathrm{v}}$$

Se il corpo è esteso, come velocità si considera quella del centro di massa, o baricentro.

Quindi il II principio lo scriveremo così:

Il Secondo Principio scritto bene: $\bar{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{p}}}{\mathrm{dt}}$

questa forma è più completa, infatti posso scriverla come:

---

[12] Vedremo che in Relatività speciale questa definizione verrà modificata.

[13] Nota: la massa non è il peso (che è la forza con cui la massa viene attratta dalla Terra e che nello spazio è nulla o molto piccola), è proporzionale al peso tramite la relazione $\bar{\mathrm{P}} = \mathrm{m} \cdot \bar{\mathrm{g}}$, "g" essendo l'accelerazione di gravità. Usualmente si scrive il modulo P=m·g, dando per scontato che la direzione della forza di attrazione è quella verticale.

$$\bar{F}_e = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt}$$

Cioè: la forza F può essere legata ad una variazione della velocità del corpo oppure ad una variazione della massa del corpo. Ma anche la velocità è composta da due termini (modulo e direzione) $\bar{v} = v \cdot \hat{v}$, quindi la formula completa diventa:

$$\bar{F}_e = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt} =$$

$$= m\frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt} = m \cdot v\frac{d\hat{v}}{dt} + m \cdot \hat{v}\frac{dv}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt}$$

ho quindi tre termini la cui causa deve essere una forza $\bar{F} \neq 0$:

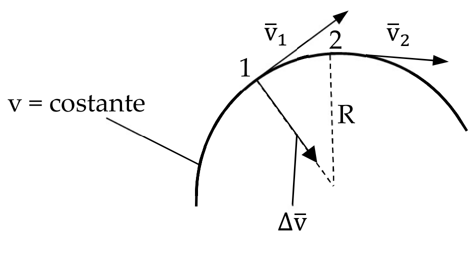
1) $m \cdot v\frac{d\hat{v}}{dt}$ ci dice che serve una Forza per modificare la **direzione** della velocità.
2) $m \cdot \hat{v}\frac{dv}{dt}$ ci dice che serve una Forza per modificare il **modulo** della velocità.
3) $\bar{v}\frac{dm}{dt}$ ci dice che serve una Forza per variare la **massa** del corpo.

Queste tre relazioni si possono leggere anche nel senso inverso; ad esempio la terza ci dice che se varia la massa di un corpo, allora ho una forza verso l'esterno (l'aereo a reazione, che emette "combustibile" verso l'esterno – all'indietro - e viene spinto in avanti).

2.3.3 Nota 1: l'accelerazione in un moto circolare

Quando ho un corpo che ruota su di un'orbita curva con velocità **costante in modulo**, la sua accelerazione, cioè la variazione della sua velocità, non è nulla, essendo legata alla variazione della **direzione** della velocità. Tale variazione è perpendicolare alla direzione della velocità stessa, quindi è diretta verso il centro della circonferenza (della circonferenza che descrive il tratto di curva).

Se conosco la velocità in un punto della traiettoria, allora si può calcolare anche la sua accelerazione (che nel caso di un moto curvo si chiama "centripeta").



$$\Delta\bar{v}(\Delta t) = \bar{v}_2(t + \Delta t) - \bar{v}_1(t)$$

$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}$$

Fig. 2.6 Calcolo grafico dell'accelerazione in un moto (localmente) circolare uniforme. La velocità è costante in modulo (v_1=v_2), ma cambia direzione. Nel tratto 1-2 la velocità cambia direzione e la variazione di v sarà diretta verso il centro, quindi anche l'accelerazione sarà diretta verso il centro: è l'accelerazione centripeta. Si deve supporre che l'intervallo di tempo Δt sia molto piccolo.

L'accelerazione centripeta che causa il cambiamento di direzione della velocità v è $a_c = \frac{v^2}{R}$ in cui R è il raggio del tratto di curva che stiamo considerando

Per far ruotare un sasso intorno a noi dobbiamo tenerlo con una corda e tirare (esercitare una forza costante). Se non esercitiamo più la forza, lasciando il filo, il corpo prosegue... per la tangente, cioè smette di curvare e va dritto secondo quanto previsto dal primo principio. Poi magari cade, perché in verticale esiste anche la forza di gravità che lo tira verso il basso.

Questo vale anche per la Luna che ruota in torno alla Terra, per la Terra che ruota intorno al Sole...

2.3.4 Nota 2

Perché è importante usare la forma del secondo principio della dinamica in cui c'è l'impulso p?

Il secondo principio, scritto in funzione della massa m, perde significato se m = 0, cioè nel caso di corpi con massa nulla.

Questo caso non creava problemi a Newton o a Galileo non essendo allora previsti da nessuna teoria corpi di massa nulla.

Ma agli inizi del '900, con la Meccanica Quantistica, viene "scoperto" il fotone (la particella di massa nulla che trasporta il campo elettromagnetico): un oggetto che viaggia sempre alla velocità della luce. Questo "oggetto" strano, il fotone, pur avendo massa nulla, trasporta Energia (il Sole ci scalda!!!) ed ha anche un impulso o una quantità di moto.

Ma come è possibile che un fotone abbia una quantità di moto diversa da zero se ha massa nulla?

Il fatto è che in Relatività la definizione di "quantità di moto" viene modificata rispetto alla definizione semplice data in Meccanica Classica.

In relatività si può esprimere la quantità di moto di un corpo così:

$\bar{p} = \frac{E \cdot \bar{v}}{c^2}$ dove E è l'energia totale del corpo, $\bar{v}$ la sua velocità, e c è la velocità della luce nel vuoto.

Così se, per esempio, ho un fotone di energia E, che viaggia nel vuoto, quindi con velocità c, la sua quantità di moto sarà $\bar{p} = \frac{E}{c}\,\hat{c}$ dove $\hat{c}$ è la direzione in cui viaggia il fotone, cioè la luce. E se il fotone $\bar{p}_0$ sbatte su di una superficie riflettente (uno specchio), e torna indietro, il suo impulso varierà di:

$\Delta\bar{p} = 2\bar{p}_0$, quindi gli servirà una forza…che è quella che sentirà lo specchio (vedi il terzo principio), è il principio delle vele solari utilizzate per far viaggiare gli oggetti all'interno del sistema solare.

2.3.5 Nota 3

Cosa succede se un corpo non è a simmetria sferica, oppure non è "piccolo"?

Si ha semplicemente che la legge $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$ continua a valere, ma è riferita ad un punto particolare del corpo, o esterno al corpo[14]: il centro di massa, o baricentro.

Il centro di massa si muoverà quindi seguendo una traiettoria definita dal secondo principio. Poi il corpo potrà avere altri moti più complicati, per esempio potrà ruotare intorno a se stesso, potrà vibrare come una molla... tutti moti governati da altre equazioni che si aggiungono (non si sostituiscono) al secondo principio.

[14] Si ricordi che il centro di massa di un corpo non necessariamente appartiene al corpo: in un anello sta al centro, dove non c'è nulla. Per un saltatore che salta con lo stile Fosbury il centro di massa del saltatore si trova sempre SOTTO l'asticella, che però viene superata da tutto il corpo.

2.3.6 Nota 4

Non tutte le grandezze sono sommabili aritmeticamente.

La velocità e lo spostamento (in una sola direzione), la massa... si sommano. Se mi sposto di $x_1 = 2$ m e poi di $x_2 = 3$ m lungo un retta, in totale mi sarò spostato di $x = x_1 + x_2 = 5$ m. Se ho due masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 3$ kg, e le metto insieme, in totale avrò una massa $m = m_1 + m_2 = 5$kg. Se ho dei vettori vale la stessa cosa, alcuni si sommano con le regole della somma vettoriale (spostamenti, velocità…), altri no, vedi la nota 5.

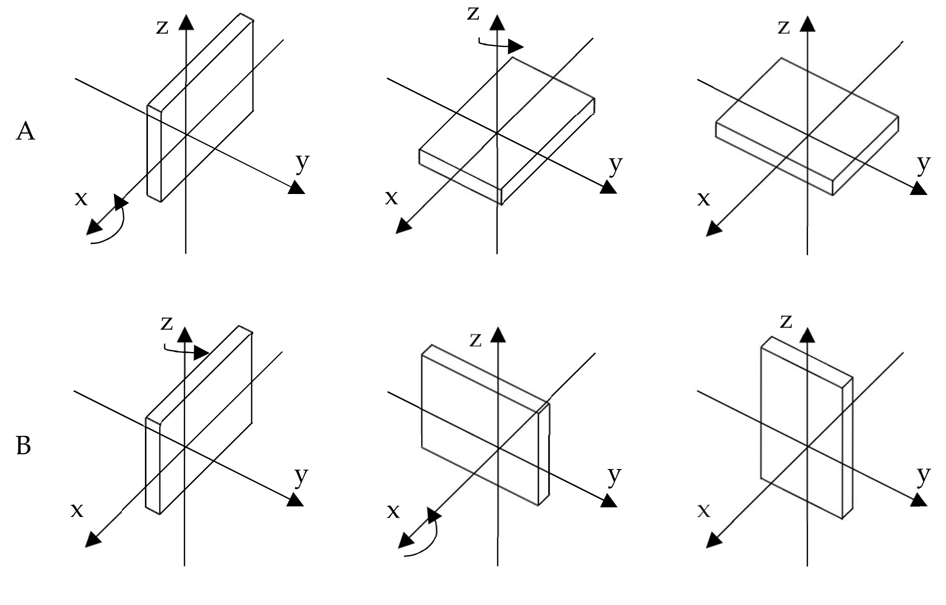
La temperatura invece non si somma.
Se ho due litri di acqua, uno a $T = 20$ ⁰C, ed un altro a $T = 100$ ⁰C, e li metto insieme, non avrò certo due litri di acqua a 120 ⁰C, ma due litri di acqua a $T = \frac{20+100}{2} = 60$ ⁰C.
Le temperature non si sommano.

2.3.7 Nota 5

Non sempre vale la relazione $A + B = B + A$, cioè che sommando due oggetti, o facendo due operazioni in sequenza, il risultato non dipenda dall'ordine con cui faccio le operazioni.
Questa relazione è soddisfatta per gli spostamenti, per le velocità, per le masse… in genere per i vettori "normali"; non lo è per alcuni vettori particolari, per esempio per le rotazioni.

Vediamo ad esempio cosa succede se applico due rotazioni R_1 e R_2 ad un libro, cambiando l'ordine con cui applico le due rotazioni:

A) Applico prima R_1= rotazione intorno all'asse x, antioraria, di 90⁰, poi R_2= rotazione intorno all'asse z, antioraria, di 90⁰.
B) Applico prima R_2= rotazione intorno all'asse z, antioraria, di 90⁰, poi R_1= rotazione intorno all'asse x, antioraria, di 90⁰.



Posizione iniziale Dopo la prima rotazione Dopo la seconda rotazione

Fig. 2.7 Applicazione di due rotazioni di 90⁰ – R1: antioraria intorno all'asse x, R2: antioraria intorno all'asse z - applicate in ordine diverso, allo stesso oggetto. Caso A: R1 + R2 , Caso B: R2 + R1. Si vede come la posizione finale dipenda dall'ordine con cui ho applicato le due rotazioni.

Si vede che la posizione del libro nello spazio è diversa alla fine delle due rotazioni, e dipende dall'ordine con cui le ho applicate.

2.4 Il terzo Principio della dinamica

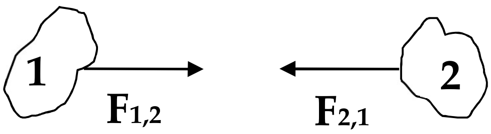
Il terzo principio della dinamica ci dice cosa succede quando ho due corpi che interagiscono.

$$\overline{F}_{2,1} = -\overline{F}_{1,2}$$

Quando due corpi interagiscono, la forza che il primo corpo esercita sul secondo è uguale ed opposta a quella che il secondo corpo esercita sul primo.

I termini: si parla di due corpi, il corpo **1** e il corpo **2**, che interagiscono tramite una forza.
Il simbolo $\overline{F}_{2,1}$ indica la forza che il corpo **1** esercita sul corpo **2**.

Esempio nel caso che la forza sia attrattiva:



Il terzo principio dice che le due forze di interazione sono uguali (i moduli, cioè i numeri proporzionali alla loro intensità, sono uguali), e che hanno la stessa direzione ma verso contrario.

Attenzione: si fa l'ipotesi che le due forze siano misurate nello stesso istante.
Questa ipotesi non sarà sempre vera, in Relatività si modificherà il concetto di simultaneità, quindi la terza legge, in alcune situazioni non sarà vera se non dopo un certo tempo[15].

Nota 1: Il III Principio riguarda le forze di interazione fra i due corpi presi in esame. Questo non vuol dire che non vi possano essere altre forze, anche diverse, agenti sui due corpi. Per esempio se il corpo 1 avesse una carica elettrica, e se nelle vicinanze ci fosse un terzo corpo con una carica elettrica, il corpo 1 sentirebbe **anche** la forza di interazione elettrica, mentre il corpo 2, se fosse elettricamente scarico, non la sentirebbe.

[15]La modifica è richiesta per tener conto del fatto, stabilito nella teoria della Relatività, che i segnali (quindi anche le interazioni) non possono trasmettersi a velocità maggiori di quella della luce c nel vuoto. Questo vuol dire che se il corpo 1 si sposta o si modifica, il suo effetto sul corpo 2, che si trova a distanza ***R*** dal primo, non potrà avvenire prima di un tempo $t \geq t_c = \frac{R}{c}$. Solo dopo questo tempo potremo scrivere la terza legge, quindi dopo aver aspettato il tempo necessario perché i due corpi si trasmettano la variazione dell'interazione. Quindi la terza legge è valida se aspettiamo il tempo necessario perché i sistemi si scambino le interazioni. Questo tempo può essere al minimo t_c, ma anche molto maggiore, dipende dal mezzo in cui si deve trasmettere l'interazione e dal tipo di interazione.

Nota 2: Questo principio è vero sempre, non è necessario che ci si trovi in un sistema inerziale, a differenza del primo e del secondo principio, che sono validi solo in un sistema di riferimento inerziale.

2.4.1 Un principio di conservazione ricavato dal III principio

Supponiamo che i due corpi 1 e 2 siano soggetti solo alle due forze di interazione reciproca, quindi che non ci siano altre forze che agiscono sui due corpi.

Possiamo scrivere il secondo principio per tutti e due i corpi[16]:

1. $\bar{F}_{1,2} = m_1 \cdot \bar{a}_1$ o, meglio: $\bar{F}_{1,2} = \frac{d\bar{p}_1}{dt}$

2. $\bar{F}_{2,1} = m_2 \cdot \bar{a}_2$ o, meglio: $\bar{F}_{2,1} = \frac{d\bar{p}_2}{dt}$

Ora, se sommiamo membro a membro le relazioni 1 e 2, che si riferiscono al corpo 1 e al corpo 2, avremo che:

$$\bar{F}_{1,2} + \bar{F}_{2,1} = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt}$$

ma, per il Terzo Principio della Dinamica $\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}$, quindi il termine a sinistra è nullo, essendo le due forze uguali e contrarie, mentre il termine a destra rappresenta semplicemente la somma delle due quantità di moto, quindi la quantità di moto totale $\bar{p}_T$ del sistema:

$$0 = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) = \frac{d\bar{p}_T}{dt}$$

Se la derivata di $\bar{p}_T$ è nulla, cioè la sua variazione nel tempo è zero, allora vuol dire che la grandezza è costante:

$$0 = \frac{d\bar{p}_T}{dt} \iff \bar{p}_T = \text{costante nel tempo}$$

che è valida se non esistono altre forze oltre a quelle di interazione fra le varie parti del sistema, il che vuole anche dire se il sistema è isolato.

Quindi un altro modo di enunciare il terzo principio della dinamica è:

♦ **In un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva (è costante nel tempo).**

2.5 Relatività/Invarianza galileiane

2.5.1 Le trasformazioni galileiane

Trasformazione di coordinate: una trasformazione è un insieme di relazioni che permettono di passare dal valore delle coordinate (della posizione ad un certo istante) di un punto in un certo sistema di riferimento al valore delle coordinate che **lo stesso punto** assume in un altro sistema di riferimento.

---

[16] Si ricordi che $\bar{F}_{1,2}$ indica la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1

In generale la trasformazione è definita fornendo le relazioni che permettono di passare dai valori (x, y, z, t) che definiscono la posizione nello spazio e nel tempo di un punto P in un sistema di riferimento O, ai valori (x', y', z', t') che descrivono lo stesso punto nel sistema O'.

Definizione: una trasformazione galileiana è una trasformazione di coordinate che permette di passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema che abbia una velocità **V** costante rispetto al primo, quindi inerziale per definizione.

Esempio:
Il caso particolare di due sistemi $O(x, y, z, t)$ e $O'(x', y', z', t')$, in cui le origini O ed O' e gli assi x, y, z e x', y', z' all'istante $t = 0$ coincidano, ed in cui uno dei due (O') si muova di moto rettilineo uniforme rispetto all'altro (O), con velocità V, in direzione x.

Tempi: Si assume che le due origini (O e O') coincidano al tempo $t = 0, t' = 0$. Data l'ipotesi di un "tempo assoluto" che vale per tutta la meccanica classica ($\Delta t = \Delta t'$), se coincidono anche le origini dei tempi misurati nei due sistemi di riferimento, si avrà che $t = t'$.

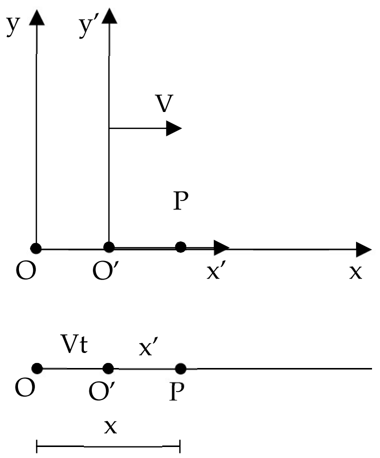


Fig.xxx Schema di due sistemi di riferimento in moto relativo. sistema O'(x',y',t') ha una velocità costante V in direzione x rispetto al sistema O(x,y,t). Si suppone che all'istante t=t'=0 i due sistemi fossero coincidenti, quindi con O≡O'.

La posizione del punto P, ad un certo istante $t = t'$ sarà x rispetto ad O, e x' rispetto ad O': $x = OP$, $x' = O'P$, inoltre si ha che l'origine O' al tempo t si sarà spostata verso destra di: $OO' = V \cdot t$, Quindi, dato che $OP = OO' + O'P$, si avrà che $x = V \cdot t + x'$. Le altre coordinate, la y e la z rimangono invariate dato che il moto avviene solo in direzione x.

Le trasformazioni per passare dal sistema $O(x, y, z, t)$ al sistema $O'(x', y', z', t')$, e viceversa, sono quindi:

$$\begin{cases} x = x' + V \cdot t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Dalle trasformazioni di coordinate posso ricavare le leggi di trasformazione per le altre grandezze; per esempio per la velocità:

dalla trasformazione: $x = x' + V \cdot t$, se derivo rispetto al tempo t, ottengo: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx\prime}{dt} + V$ da cui, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx\prime}{dt\prime} + V$, quindi: $v = v' + V$.

Le velocità quindi si sommano secondo la seguente formula: $v[P(O)] = v'[P(O')] + V[O'O]$

Derivando ulteriormente, ottengo la formula per la trasformazione delle accelerazioni:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v' + V) = \frac{dv'}{dt} + 0 = a'$$

Da cui si vede che, mentre le velocità cambiano nei due sistemi di riferimento (la velocità è relativa al sistema di riferimento), le accelerazioni sono le stesse.

Come si trasforma la Forza? Dall'ipotesi di relatività ho che $F' = m'a'$ n, ma nella fisica classica la massa si assume indipendente dalla velocità e dal SdR, quindi $m = m'$.

Dalla relazione mostrata sopra abbiamo inoltre che $a = a'$, quindi:

$$F' = m'a' = ma = F$$

Cioè le forze, misurate in due sistemi di riferimento inerziali, sono uguali:

$$F = F'$$

Gli osservatori di tutti i sistemi di riferimento inerziali misureranno quindi le stesse forze e le stesse accelerazioni… la fisica è la stessa.

2.5.2 La relatività e invarianza galileiana

♦ **Le leggi della fisica hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.**

(Galileo Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, 1632.)

Per "forma" si intende la forma algebrica e il significato dei termini.

Quindi, per esempio, in un qualunque SdR inerziale posso scrivere il secondo principio della dinamica $\overline{F} = m \cdot \overline{a}$ dove $\overline{F}$ e $\overline{a}$ sono misurate nel SdR in oggetto.

Nota: Quando scrivo una legge, una qualunque relazione ($F = ma$ ...), e devo misurare e/o calcolare le grandezze che compaiono nella formula, ho sempre almeno **due** "oggetti" che sto considerando:

1) Il corpo o il sistema fisico in esame.
2) Il valore della misura delle grandezze che descrivono il corpo ↔ chi fa la misura ideale ↔ Il sistema di riferimento rispetto a cui il corpo viene misurato.

Il fatto che le leggi fisiche abbiano la stessa forma spesso si scrive dicendo che le leggi sono "invarianti"

- ♦ **Le leggi della fisica sono invarianti rispetto a trasformazioni galileiane.**

2.6 Le leggi di Keplero

Keplero scrive, fra il 1609 e il 1618, tre leggi che descrivono il moto dei pianeti intorno al sistema solare. Le leggi sono inferite utilizzando i dati di misurati con grande precisione dal suo maestro, Tycho Brahe, negli ultimi decenni del 1500.

1) I pianeti si muovono secondo orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

2) Per ogni pianeta il raggio sole-pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.

3) Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo dell'asse maggiore ha lo stesso valore per tutti i pianeti - è una costante.

2.6.1 Nota matematica: L'Ellisse

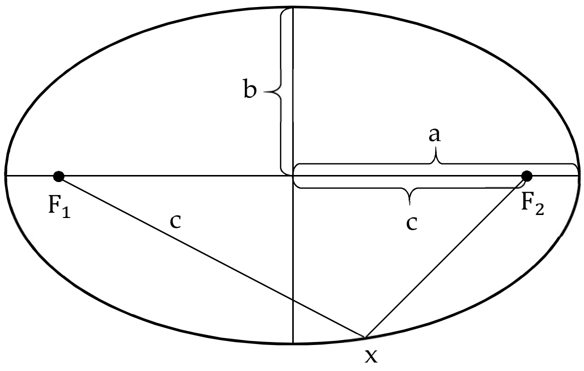
L'ellisse è la curva del piano descritta da un punto tale che la somma delle distanze dal punto e da due punti fissi (i fuochi) sia costante.

La dimensione e la forma di un'ellisse sono determinate da due costanti, dette convenzionalmente a *e* b*. La costante* a *è la lunghezza del semiasse maggiore; la costante* b *è la lunghezza del semiasse minore.*

L'equazione dell'ellisse si trova eguagliando la somma delle distanze fra i fuochi e un punto generico P (x; y) e il doppio del semiasse maggiore: $PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=2a$$

$c = e \cdot a$



Per trovare l'equazione canonica o normale dell'ellisse (cioè con centro nell'origine e i fuochi nell'asse delle x) sostituiamo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ *e con le opportune manipolazioni si ottiene un'ellisse centrato nell'origine di un sistema di assi cartesiani x-y con l'asse maggiore posto lungo l'asse delle ascisse. L'ellisse è definito dall'equazione:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La stessa ellisse è rappresentata anche dall'equazione parametrica:

$$x = a\ \cos t$$
$$y = b\ \sin t$$
$$0 \leq t < 2\pi$$

La "forma" di un'ellisse, cioè quanto sia "ellittica" rispetto ad una circonferenza, è espressa da un numero detto eccentricità dell'ellisse, convenzionalmente denotata da e *(da non confondere con la costante matematica* $e = 2{,}72$*...). L'eccentricità è legata ad* a *e* b *dall'espressione* $e = \frac{c}{a}$ *ed è un numero positivo compreso tra 0 e 1. Se* e *è uguale a 0, l'ellisse degenera in una circonferenza, se è uguale a 1 degenera in una retta. Maggiore è l'eccentricità, maggiore è il rapporto tra* a *e* b*, quindi l'ellisse sarà più allungata. La distanza tra i due fuochi è* $2c$.

In coordinate polari, un'ellisse con un fuoco nell'origine e l'altro lungo la parte negativa dell'asse delle ascisse è data dall'equazione: $r(1 + e\cos\theta) = l$, *L'area racchiusa da un'ellisse è* $S = \pi ab$.

La lunghezza della circonferenza è $c = 4a \cdot E(e)$, *dove la funzione E è l'integrale ellittico del secondo tipo.*

L'eccentricità dell'orbita della Terra oggi è 0.0167. Nel tempo l'eccentricità dell'orbita terrestre varia lentamente come risultato dell'attrazione gravitazionale tra i pianeti.

PIANETA	***A (UA)***	***Periodo (10^7s)***	***eccentricità***
Mercurio	*0,387*	*0,76*	*0,205*
Venere	*0,723*	*1,94*	*0,006*
Terra	*1*	*3,16*	*0,016*
Marte	*1,523*	*5,94*	*0,093*
Giove	*5,202*	*37,4*	*0,048*
Saturno	*9,554*	*93,0*	*0,055*
Urano	*19,218*	*266*	*0,046*
Nettuno	*30,109*	*5200*	*0,008*

Plutone	*39,60*	*7820*	*0,246*

2.6.2 Note alle tre leggi

1) Le ellissi, per quasi tutti i pianeti, sono delle ellissi molto poco ellittiche: l'orbita è in realtà molto molto vicina ad una circonferenza.

In figura 1 sono un'ellisse con e = 0,05 (traccia rossa),e una circonferenza perfetta (con e=0). Su questa scala non si vede la differenza.

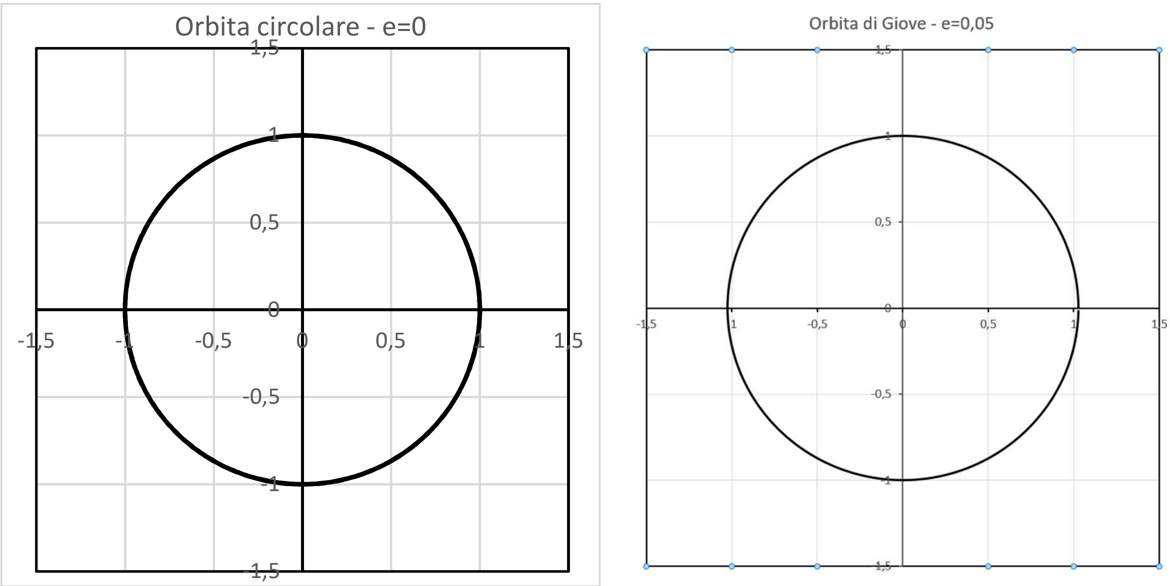


Fig.1 Orbita circolare (e=0) ed orbita ellittica con e = 0,05 (come quella di Giove). Si vede che l'orbita di Giove è leggermente più grande sull'asse orizzontale. Si vede meglio in figura 2.

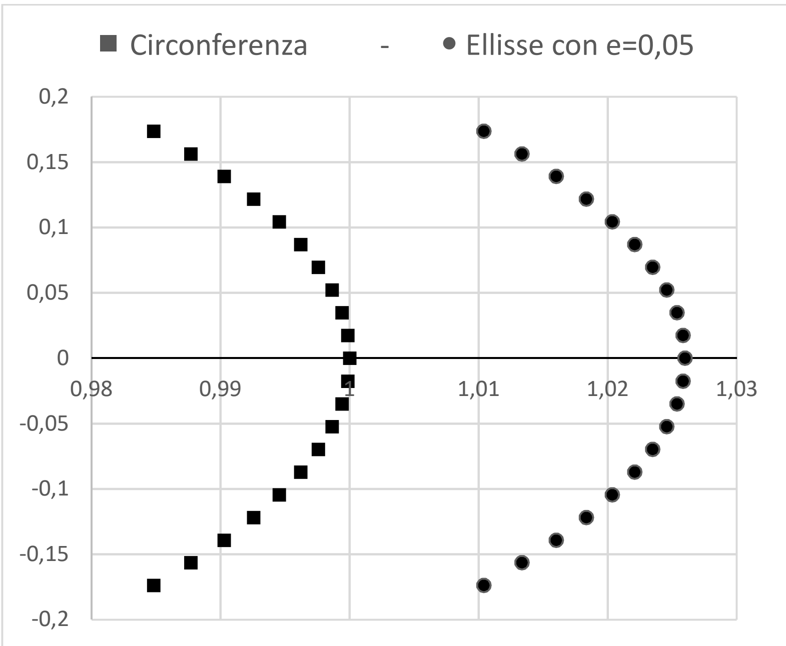


Fig.2. Ingrandimento delle due tracce di figura 1 tracciate vicino all'estremo destro della traiettoria. Si vede che la differenza sul raggio, che vale 1, è di circa 0,025 cioè del 2,5%.

Nella figura 2 è mostrato un ingrandimento della parte superiore della figura 1, in cui si può valutare la differenza fra le due curve. La distanza dal centro delle due figure (il raggio) è 1 (esatto) per la circonferenza, e 1.025 per l'ellisse. Quindi la variazione percentuale del raggio è:

$\frac{R_e - R_c}{R_c} = \frac{1{,}025-1}{1} = 0{,}025 = 2{,}5\%$ si ha cioè una variazione 2,5 %.

Questo vuol dire che, per apprezzare questa variazione, devo essere in grado di fare delle misure con una precisione almeno 10 volte migliore; quindi serve una precisione dello 1,2 % cioè di 12 parti su 1'000.

Questa, circa, è la precisione necessaria nella misura della posizione del pianeta se si vuole distinguere l'orbita circolare da quella ellittica. E questa era quindi la precisione che avevano le misure di Tycho Brahe utilizzate da Keplero.

2) La seconda legge, detta con altre parole, ci dice come cambia la velocità del pianeta lungo l'orbita, che quindi non è costante. La velocità è maggiore quando il pianeta è più lontano dal Sole e minore quando è più vicino. Come nel caso precedente questa differenza è molto piccola, proprio perché l'orbita è quasi circolare, quindi le distanze minime e massime sono circa uguali, e quindi anche le velocità.

3) La terza legge fu scoperta da Keplero che cercava un rapporto "pitagorico" (cioè una frazione fra numeri semplici) fra il valore del periodo di rivoluzione e quello dell'asse maggiore. E' un puro caso che poi quello giusto fosse effettivamente 3/2. Non sempre la natura è così benigna da essere descritta da formule e numeri "semplici".

2.7 Principi/ Leggi/ Leggi fenomenologiche

I principi, le leggi generali e le leggi fenomenologiche hanno diversa origine, diversa importanza e diverso potere predittivo. Consideriamone tre: il secondo principio della dinamica, la legge di gravitazione universale e le leggi di Keplero.

- $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\bar{\mathbf{a}}$ (Newton, 1687): E' un principio, forse IL PRINCIPIO per eccellenza. Un principio vale sempre, per ogni sistema, a parte il limite al sistema di riferimento in cui vengono misurate le grandezze coinvolte. E' la forma più generale che posso dare ad una legge. A sinistra ho l'espressione matematica della Forza che agisce sul corpo… vale per qualunque forza. Quando è stata scritta d Newton l'unica forza di cui si conosceva l'espressione era la forza di attrazione gravitazionale, ma poi viene usata per le forze di natura elettrica, magnetica…

- **Legge di Gravitazione Universale** (Newton, 1687):

$$\bar{F}_G = -\,G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}\hat{R}$$

E' l'espressione matematica della forza che si esercita fra due corpi dotati di massa. Ci dice che due corpi di massa m_1 ed m_2 a distanza R sia attraggono (il segno – indica che la forza è diretta in verso opposto ad $\widehat{\mathrm{R}}$) con l'espressione indicata dalla legge.
Non è un teorema! Non può essere dimostrata. Nasce dall'intuizione di Newton… e funziona. E continuerà ad essere utilizzata fin quando non si scoprirà che esistono dei casi in cui non funziona più, allora verrà sostituita da una nuova legge[17]. Una legge fisica può anche essere definita così: *una legge fisica è un'asserzione la cui negazione è non contradditoria.* Deve essere chiaro cosa si intende per "non contradditorio". Si intende che non può essere dedotta logicamente da altre leggi, quindi che se la nego non ho nessuna contraddizione. P.E. in questo caso, se avessi scritto che la forza era proporzionale alla radice quadrata delle masse [$\propto \sqrt{\mathrm{m}_1 \cdot \mathrm{m}_2}$], oppure all'inverso del cubo della distanza [$\propto 1/R^3$], non avrei potuto dire che era logicamente sbagliata… poteva benissimo essere vera. Quello che invece non può essere contraddetto è il confronto con il risultato sperimentale di una misura… cioè il confronto con l'esperienza.

- **Leggi di Keplero** (1609-1618): sono leggi fenomenologiche, cioè ricavate dai dati: descrivono matematicamente un particolare fenomeno. Non è detto che possano essere utilizzate per descrivere altri sistemi, ma posso utilizzarle per verificare (falsificare) un'ipotesi, per esempio la validità di una legge più generale. Le leggi di Keplero, scritte *prima* che fossero enunciati i Principi della Dinamica e la Legge di gravitazione Universale, possono essere facilmente ricavate da queste due. Ne sono una conseguenza.

2.7.1 Come funzionano i Principi e le Leggi

Prendiamo come esempio il moto di due corpi liberi nello spazio, soggetti quindi alla sola forza di gravità.

La [Legge di gravitazione universale] + [***F=ma***] permettono di calcolare le accelerazioni, le velocità e le traiettorie di qualunque oggetto che si muova sotto l'azione della Forza gravitazionale.

Facciamo un esempio molto facile, semplificato. Il caso di un oggetto che si trova vicino alla superficie terrestre e che cade. In questo caso sia il corpo che la Terra sono liberi, ma dato che la massa del corpo è infinitamente più piccola di quella della Terra, è il corpo che "cade" avvicinandosi alla Terra; anche la Terra "cade" verso il corpo, ma di una quantità trascurabile, posso considerale ferma.

La forza di attrazione gravitazionale, vicino alla superficie terrestre, posso scriverla come[18]

$$\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\bar{\mathrm{g}}$$

Scriviamo le seconda legge di Newton:

$$\bar{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\bar{\mathrm{a}}$$

Uguagliamole…abbiamo $\mathrm{m}\bar{\mathrm{g}} = \mathrm{m}\bar{\mathrm{a}}$, cioè: $\bar{\mathrm{g}} = \bar{\mathrm{a}}$, [avendo fatto l'ipotesi che la massa inerziale sia uguale a quella gravitazionale, vedi paragrafo successivo] l'accelerazione a del corpo è quindi costante e diretta come l'accelerazione di gravità, verso il basso. In più si vede che la massa è scomparsa….il moto sarà indipendente dalla massa!

Ora proviamo a calcolare l'equazione del moto, cioè la posizione del corpo in vari istanti di tempo, se per esempio partisse da un'altezza h, questo è un calcolo un pochino complicato per chi non conosce la matematica :

Quello che so è che il corpo avrà un'accelerazione a(t)= - g , e indico con z l'asse verticale, mettendo lo zero sulla superficie terrestre, la direzione dell'asse verso l'alto (per questo l'accelerazione è negativa, punta verso il basso).

---

[17] In questo caso la Relatività Generale di A. Einstein (1915).
[18] Vedi questo capitolo, par. 10.1

1) calcolo la velocità v(t) sapendo che $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$ e che il corpo parte da fermo, cioè v(0)=0

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t -gdt = -\,g\int_0^t dt = -\,gt$$

quindi $v(t) = gt$: la velocità cresce linearmente con il tempo.

2) calcolo la posizione z(t) sapendo che $v(t) = \frac{dz(t)}{dt}$ e che il corpo parte dall'altezza h

$$z(t) - z(0) = z(t) - h = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t -gtdt = -\,g\int_0^t tdt = -g\frac{1}{2}t^2$$

quindi $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + h$: il corpo cade con uno spostamento proporzionale al quadrato dei tempi… questa era la legge trovata da Galileo per il moto dei gravi:

Se un mobile scende, a partire dalla quiete, con moto uniformemente accelerato, gli spazi percorsi da esso in tempi qualsiasi stanno tra di loro in duplicata proporzione dei tempi [Galilei, Discorsi…] [in un rapporto pari al rapporto dei tempi moltiplicato per se stesso], cioè stanno tra di loro come i quadrati dei tempi.?

Si noti che questo è lo spostamento "calcolato", se poi faccio delle misure potrò confrontare lo spostamento calcolato con quello misurato e trarne le dovute conseguenze.

2.8 Il principio di equivalenza

Ci sono due versioni del Principio di Equivalenza, entrambe dovute ad Albert Einstein:

- la versione *forte* afferma che in un campo gravitazionale qualsiasi, è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento rispetto al quale scegliere un intorno di un punto in cui gli effetti dell'accelerazione dovuti al campo gravitazionale sono nulli;
- quella *debole* asserisce che la massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto, e la massa gravitazionale, che rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire l'influsso di un campo gravitazionale, sono numericamente uguali.

Gli appellativi di forte e debole si giustificano dal momento che se vale il principio di equivalenza nella forma forte deve valere anche quello nella forma debole, mentre da un punto di vista logico l'implicazione non è reversibile. Questa caratteristica fa sì che, anche se il principio in forma debole è stato sperimentalmente confermato con precisione elevatissima, ciò non è sufficiente a garantire lo stesso grado di certezza anche alla forma forte, che deve essere dunque considerata ancora come un postulato.

Dal secondo principio della dinamica ho:

$$F = m_i a \quad \text{dove} \quad \mathbf{m_i} = \text{massa inerziale}$$

e dalla legge di gravitazione universale:

$$F_G = G\frac{m_G \cdot m_2}{R^2} \quad \text{dove} \quad \mathbf{m_G} = \text{massa gravitazionale}$$

Il Principio di equivalenza pone:

$$\mathbf{m_i = m_G}$$

Come si "verifica"? Misurando gli effetti inerziali e gravitazionali sullo stesso corpo:

$m_i = \frac{\overline{F}}{\overline{a}}$ (molla) ; $m_G = \frac{F_G R^2}{G m_T}$ (m_T = massa terra) (caduta libera – pendolo - bilancia di torsione)[19]

Test sperimentali del Principio di equivalenza:

	autore	*anno*	*metodo*	*incertezza relativa*[20]
•	Galileo Galilei	1590	caduta libera	2×10^{-2}
•	I. Newton	1686	pendolo	$\sim 10^{-3}$
•	L. Eötvös	1922	bilancia di torsione	5×10^{-8}
•	J. Renner	1930	bilancia di torsione	5×10^{-9}
•	R.H. Dicke et al.	1964	bilancia di torsione	3×10^{-11}
•	V.B. Braginsky, V.I.Panov	1972	bilancia di torsione	3×10^{-12}
•	Adelberger et al.	2008	bilancia di torsione	3×10^{-14}
•	MICROSCOPE (da fare)	2016	sistema orbitante	$\sim 10^{-17}$?

Pendolo: il periodo di oscillazione di un pendolo di lunghezza L, massa $m_{G,I}$, posto sulla Terra (di massa M_T e raggio R_T), quindi in un luogo dove l'accelerazione gravitazionale è **g** ,vale:

$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{m_G}{m_I}\frac{L}{g}} \cong 2\pi\sqrt{\frac{m_G}{m_I}\frac{LR_T^2}{GM_T}}$$

2.8.1 I fotoni in un campo gravitazionale

Cosa succede per i fotoni?
Il fotone ha massa nulla; dalle formule della Teoria speciale della Relatività si ha:

$E^2 = p^2c^2 + M^2c^4$, dove M è la massa a riposo. Per il fotone (M = 0) si ha quindi:
$E = pc$, ma anche $E = h\nu$, da cui si ha: $p = \frac{h\nu}{c}$,
quindi un fotone ha massa inerziale, equivalente alla sua energia E: $m_I = \frac{p}{c} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{E}{c^2}$

Un fotone di frequenza ν che "cade" sulla Terra per un'altezza *z*, acquisterà un'energia *come se* fosse una massa che cade da un'altezza z in un campo gravitazionale g (supposto costante)[21]. Se questa energia acquistata è piccola rispetto a quella iniziale la sua frequenza cambierà secondo la relazione:

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2} g\, z$$

Le misure hanno confermato il calcolo.

---

[19] Per approfondire e per il dettaglio sul funzionamento della bilancia di torsione vedi p.e. "La Fisica di Berkeley", Meccanica, Cap. 14, Principio di equivalenza.

[20]Per incertezza relativa si intende il valore dell'incertezza relativa nella valutazione della grandezza $R=m_I/m_G$ (che è circa uguale a 1),quindi ◎R/R.

[21] E(z)= mg z.

2.9. La Meccanica Classica, un compendio

- Lo Spazio ed il Tempo sono assoluti, indipendenti, omogenei ed isotropi.

- In un sistema di riferimento inerziale valgono i primi due Principi della Dinamica, il terzo vale per ogni SdR (sono le tre leggi di Newton):

  I - Se la somma delle forze (esterne) che agiscono su di un corpo è zero, allora il corpo ha accelerazione nulla, cioè velocità costante:

  $$\bar{F}_e = 0 \Rightarrow \ \bar{a} = 0 \text{ quindi } \bar{v} = \text{costante}$$

  II - Vale la relazione: $\bar{F}_e = m \cdot \bar{a}$, dove m, la massa, rappresenta la quantità di materia del corpo.

  III - Quando due corpi interagiscono, la forza $\bar{F}_{2,1}$ che il primo corpo esercita sul secondo è uguale ed opposta alla forza $\bar{F}_{1,2}$ che il secondo corpo esercita sul primo: $\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}$

- E' valida la legge di gravitazione universale di Newton [22]:

$$\bar{F} = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}\hat{R}$$

- Assunzione ulteriore (verificata sperimentalmente): le forze e tutte le interazioni diminuiscono di intensità con la distanza relativa dei corpi interagenti, quindi se un corpo è "abbastanza" lontano da altri corpi non è soggetto a forze esterne. Questo permette di definire un sistema di riferimento in cui non agiscono forze esterne come un sistema abbastanza lontano da altri corpi: per esempio un sistema nello spazio fra una galassia e l'altra.

- Invarianza galileiana: Le leggi della fisica sono invarianti rispetto a trasformazioni galileiane.

2.10 L'Energia. 1

Il concetto di Energia è un concetto moderno, che non appare negli scritti di Galileo o di Newton, e che viene definita nel XIX secolo nell'ambito della Termodinamica, per poi essere esteso e modificato più volte nei secoli seguenti[23]. Qui introdurrò l'Energia meccanica (classica), per poi ridefinirla nei capitoli successivi.

Il problema con la definizione moderna di cosa sia l'energia è che in realtà abbiamo dei seri problemi nella sua definizione. Mi rifarò a quello che scrive Feynman nel suo famoso manuale (Feynman, 1992, vol. I, par 4.1):

E' importante tenere presente che nella fisica odierna noi non abbiamo cognizione di ciò che l'energia è. Non

---

[22] Il segno "-" nella formula sta ad indicare che la forza è attrattiva, talvolta la forza si scrive semplicemente come modulo, quindi senza il riferimento alla direzione, in questo caso il segno sparisce dato che il modulo è per definizione una grandezza ≥ 0.

[23] Il termine "energia" in realtà esisteva anche nella lingua greca, ed è stato utilizzato anche successivamente, tuttavia con significati diversi, spesso ambigui o molto diversi dal significato che oggi gli diamo.

abbiamo un modello che esprima l'energia come somma di termini finiti[24]*. Non è così. Tuttavia vi sono formule per calcolare alcune quantità numeriche, e se le sommiamo tutte otterremo sempre lo stesso numero.*

[…]

Esiste una proprietà, o se preferite una legge, che governa tutti i fenomeni naturali conosciuti fino ad oggi. Non si conosce eccezione a questa legge, essa è esatta nel limite delle nostre osservazioni. La legge è chiamata conservazione dell'energia. Essa stabilisce che vi è una certa quantità, che chiamiamo energia, che non cambia nei molteplici mutamenti subiti dalla natura. Il concetto è astratto, poiché si tratta di un principio matematico; esso afferma che esiste una quantità numerica che non cambia qualunque cosa accada. Non è la descrizione di un meccanismo o di un fenomeno concreto, è soltanto il fatto singolare di poter calcolare un numero, e dopo aver osservato i mutamenti capricciosi della natura, ricalcolarlo ottenendo sempre lo stesso risultato.

Quindi l'Energia è un numero (nel senso che non è un vettore), caratteristico di ogni sistema, che, in un sistema chiuso, si conserva, cioè non varia nel tempo. E quindi che è molto comodo poter calcolare. Se so quanto vale in un certo istante, so che rimarrà sempre lo stesso, magari cambiando di forma, quindi potrò utilizzarlo per capire cosa è successo. Un'analogia potrebbe essere quella del "patrimonio" che possiedo. Se ho una borsa con 100 monete d'oro…. e alla fine della giornata me ne trovo 86, vuol dire che ne ho spese 14, e che qualcuno ha ricevuto queste 14 che mancano a me. Ma poi posso decidere di avere monete d'oro e d'argento ed allora non conterò più le monete, ma il loro valore. E poi potrò scoprire che ho anche dei biglietti di banca, magari di vari Stati, e degli assegni (facciamo finta che non esista il problema della svalutazione delle monete o del cambio di valore dei beni). E posso includere nel mio patrimonio anche delle terre o delle case o delle azioni (comprate con i beni liquidi) … insomma il concetto di "asset" (beni). Una volta definito che voglio valutare i miei beni, scoprirò che i beni esistono in varie forme e che tutte insieme – sommate – formano il mio patrimonio. E non mi soffermerò nell'elencare cosa siano tutti i "beni", in ogni momento potrei scoprire che ce ne sono di nuovi (i beni intellettuali, i beni non confiscabili, i cespiti…).

Per l'Energia è più o meno la stessa cosa, quindi quello che faremo è di indicare capitolo per capitolo i vari termini che il mondo scientifico ha deciso che siano "pezzi della grandezza Energia", e che a posteriori si vede che funzionano.

Quello che vedremo è che, benché la definizione di Energia possa non essere chiara ed immediata, sono invece molto chiari i significati delle varie parti di cui può essere composta l'Energia. Quindi avrò Energia cinetica (legata alla velocità), Energia potenziale (legata alla posizione), Energia termica (legata alla Temperatura), Energia elettrostatica (legata alle cariche elettriche ferme) , Energia Magnetica (legata al campo magnetico fermo) , energia elettromagnetica (legata al trasporto nello spazio di un campo elettrico e di un campo magnetico variabili) , energia nucleare (legata alle interazioni fra i nuclei atomici)….e così via.

La confusione forza-energia: storicamente si è avuto molto spesso un utilizzo indifferenziato dei termini Forza ed Energia. Lo stesso Helmholtz intitolava il lavoro del 1847 con cui enunciava il principio di conservazione dell'Energia "Conservazione della Forza". Leibniz utilizzo il termine "forza viva" per indicare una grandezza proporzionale all'Energia cinetica, purtroppo questa dizione è rimasta in molti testi del XX secolo generando confusione e dubbi, anche perché, dopo aver parlato della *forza viva*, poi uno si chiederebbe cosa sia la *forza morta*…

2.10.1 L'Energia Meccanica

Riprendendo l'analogia monetaria, una definizione di una grandezza la si può dare dicendo a cosa serve. Nel caso dei "beni" una definizione può essere quella di decidere che un bene è qualcosa (di finito) che può essere utilizzato soddisfare un bisogno. Nel senso di "modificare" una situazione perché io ne abbia una utilità.

Se ci limitiamo all'Energia "meccanica", che ancora non ho definito, si può dare come significato il fatto che l'Energia meccanica è una misura del "Lavoro" che può essere ottenuto da un corpo. E per

[24] [NdA] Con questo si intende che non abbiamo un modello che esprima "tutti" i possibili termini dell'energia. Ne conosciamo molti e quelli usiamo, ma potrebbero benissimo essercene altri che non conosciamo.

"lavoro" qui possiamo prendere un esempio antico, del 1803, ma ancora valido per dare un primo senso alla parola. Si tratta di un famoso brano di L. Carnot (Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement, Deterville, Paris, 1803).

L'esperienza prova che gli uomini, gli animali ed altri agenti di questa natura, possono esercitare delle forze paragonabili a quelle dei pesi[25]. *[…] è naturale valutare il lavoro*[26] *sia attraverso il peso che egli* [l'uomo] *può sollevare, sia attraverso l'altezza alla quale egli solleva questo peso. […] Poiché è evidente che sollevare un peso di 100 chilogrammi a 1000 metri di altezza è la stessa cosa che sollevare 200 chilogrammi a 500 metri soltanto, ne segue che il lavoro, da questo nuovo punto di vista, deve essere direttamente proporzionale ai pesi da sollevare ed alle altezze alle quali occorre portarli.*

Detto in formule è la moderna definizione di lavoro fatto da una forza. Se l'uomo vuole alzare una massa m, deve applicare una forza (almeno) uguale e contraria alla forza di gravità $\bar{F} = -\bar{F}_g = -m\bar{g}$

Se la massa m la voglio alzare per un'altezza h dovrò fare un lavoro $L = \bar{F} \cdot \bar{h}$ dove ho scritto le grandezze in forma vettoriale per tener conto della differente direzione che possono avere la Forza applicata e lo spostamento risultante[27].

Questo "lavoro" fatto non è altro in realtà che l'energia che devo spendere per ottenerlo. Quindi, generalizzando posso definire l'energia meccanica come quella grandezza che mi dice quanto lavoro "potrei" ottenere da questa energia.

Notiamo due cose importanti: ho usato la parola "potrei", non dico come, magari non so come farlo, è una posizione di principio. Sono nel regno della Meccanica, ancora non ho mai parlato di Termodinamica, quindi di Temperatura, di corpi che si scaldano... cioè di fenomeni dissipativi. Sono ancora in un mondo ideale dove l'attrito è zero, non ho energia dissipata in calore, e l'Energia meccanica si conserva.

Nel caso dell'Energia meccanica possiamo dare delle definizioni abbastanza semplici, perché al momento il mio universo è molto limitato e semplice: ho solo degli oggetti – con determinate configurazioni[28] - questi si trovano in qualche punto dello spazio e possono essere fermi oppure in moto. Da queste informazioni mi posso calcolare varie forme di energia meccanica.

2.10.2 I termini che formano l'energia meccanica

In questo panorama molto semplificato – senza attriti, quindi senza energia trasformata in calore – ho due soli termini che compongono la grandezza "Energia".

1) L'energia legata al movimento, è quella che si chiama **energia cinetica.** Si può calcolare, ma qui non lo farò, il calcolo si trova in un qualunque testo di fisica elementare, quello che si ha è:

$$\text{Energia cinetica} = E_c = K = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

Si noti che l'energia cinetica dipende dalla velocità, che a sua volta dipende dal sistema di riferimento in cui mi trovo, quindi l'energia cinetica non è un invariante, sarà differente per ogni osservatore.

2) L'energia legata alla posizione del corpo rispetto ad altri corpi con cui interagisce, chiamata **energia potenziale**, che in genere viene indicata con il simbolo U.
   Stiamo parlano di corpi che interagiscono, quindi deve esistere una forza fra di loro, come si calcola l'energia potenziale in funzione della forza applicata ad un corpo e della sua posizione? Anche qui il calcolo può essere fatto[29], quello che si fa è calcolare il lavoro che deve fare la forza

---

[25] Cioè se voglio alzare un peso da 1 kg, devo applicare al corpo una forza pari a quella della forza di gravità dovuta al peso stesso.

[26] Si sta parlando di lavoro dell'uomo, nel senso convenzionale…

[27] Si pensi, anche se è un caso complicato, alla barca a vela che si può muovere in una direzione diversa da quella da cui proviene il vento che esercita una forza sulla vela.

[28] Con questo intendo che un oggetto semplice è solo una pallina dotata di massa, ma in generale potrò considerare ruote, leve, ruote collegate fra loro…

[29] $\Delta U(r) = \int_c^r -\bar{F}(r) \cdot \overline{ds}$ dove $\Delta U(r)$ è la variazione dell'energia potenziale fra il punto r e un punto c.

esterna per spostare il corpo da un punto ad un altro punto. La cosa essenziale è che il calcolo mi dice solo la differenza di energia potenziale fra due punti. Avrò sempre un punto a cui riferirmi per calcolarne il valore. Questo punto viene scelto in genere come il più comodo. Con un esempio sarà più chiaro.

L'esempio classico è quello dell'energia gravitazionale se mi trovo sulla Terra. Se prendo un corpo di massa m e lo sposto da una posizione r_c ad un'altra posizione r_a avrò che la differenza di energia gravitazionale del corpo sarà

$$\Delta U = U_a - U_c = \frac{GMm}{r_c} - \frac{GMm}{r_a}$$

Da questa espressione si vede che un punto "comodo" da prendere come riferimento è quello in cui $r_c \rightarrow \infty$ perché così il termine con r_c va a zero e posso scrivere

$$\Delta U = U_a - U_\infty = U_a = -\frac{GMm}{r_a}$$

Questa è quindi l'energia gravitazionale di un corpo a distanza r_a dal centro della Terra.

Ma c'è un problema: tutti (?) sanno che l'energia gravitazionale posso scriverla come U= mgh, dove h è la distanza dalla superficie della Terra. Cosa ha a che fare questa con quella scritta precedentemente?

Perché quando scrivo l'energia gravitazionale di un corpo non scrivo la distanza dal centro della Terra? Perché sto facendo un'approssimazione. Il raggio della Terra è di circa 6400 km, quando sposto un corpo di poche decine di metri, o anche di qualche chilometro (circa 8 se lo porto in cima al monte Everest) mi sto spostando di molto poco rispetto al punto in cui stavo. Quindi posso fare un'approssimazione e scrivere la mia energia prendendo come riferimento la superficie terrestre e supponendo di spostarmi poco.

Per chi fosse interessato questo è quello che si chiama sviluppo in serie. Faccio i calcoli tenendo conto che se mi sposto di poco (h) sopra la superficie terrestre ho che

$$\mathrm{U}(\mathrm{r_a} = \mathrm{R_T} + \mathrm{h}) = -\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{r_a}} = -\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R_T} + \mathrm{h}} = -\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{R_T}} \cdot \frac{1}{1 + {}^{\mathrm{h}}\!/_{\mathrm{R_T}}} = -\mathrm{gR_T} \cdot \frac{1}{1 + {}^{\mathrm{h}}\!/_{\mathrm{R_T}}}$$

Avendo scritto: $\frac{GM}{R_T^2} = g$ (già: l'accelerazione di gravità non è niente altro che una combinazione della costante di gravitazione universale G, della Massa M della Terra e del suo raggio R_T.

E poi faccio l'approssimazione[30]:

$$\frac{1}{1 + {}^{\mathrm{h}}\!/_{\mathrm{R_T}}} \cong 1 - \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R_T}}$$

L'energia ad un'altezza h dalla superficie terrestre sarà quindi:

$$\mathrm{U(h)} = -\mathrm{mgR_T}\left(1 - \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R_T}}\right) = -\mathrm{mgR_T} + \mathrm{mgh} = \mathrm{mgh} + \mathrm{costante}$$

Se poi decido di prendere come "0" dell'energia potenziale il valore sulla superficie terrestre, ottengo il risultato riportato in tutti i libri: l'energia potenziale di un corpo di massa m ad un'altezza h è mgh.

L'energia potenziale elastica: qualche anno prima che I. Newton pubblicasse i suoi *Principia*, nel 1675, Robert Hooke pubblica una legge che rappresenta "la legge" che governa le deformazioni dei corpi solidi e come si comportano quando sono sottoposti ad una pressione o ad una trazione: la cosiddetta legge di Hooke che stabilisce il comportamento di una molla ideale. Hooke dice che l'allungamento di una molla è proporzionale alla forza collegata alla molla[31]:

---

[30] Quanto è buona questa approssimazione? Il calcolo esatto, per esempio per h = 1km, mi dà : $\frac{1}{1+{}^{1}\!/_{6400}} = 1{,}000156226$ .... Mentre il calcolo approssimato: $1 - \frac{h}{r_T} = 1{,}000156250$, la differenza relativa è molto piccola, è di circa $20 \cdot 10^{-9}$, cioè di 20 parti per miliardo… è un'ottima approssimazione.

[31] Quando Hooke scrive questa legge, Newton non aveva ancora scritto le tre leggi della dinamica, anche la

$$\bar{F} = -k\bar{x}$$

dove $\bar{x}$ è l'allungamento della molla, k è una costante legata alle caratteristiche meccaniche della molla (la forma, il materiale, le dimensioni…) e $\bar{F}$ la forza applicata alla molla.

A questa deformazione posso associare un'energia potenziale[32]:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Questa è la sola altra forma di energia potenziale meccanica che si conosceva alla fine del XVII secolo. Con questa, con l'energia potenziale gravitazionale e con l'energia cinetica si poteva scrivere una legge fondamentale: E= costante

2.10.3 La conservazione dell'Energia Meccanica

Una volta definita l'energia e i termini che la compongono – che potranno essere modificati – si può scrivere una legge fondamentale che a tutt'oggi governa il "funzionamento" di tutto l'universo.

L'Energia di un sistema isolato è costante

Dove, per ora, stiamo considerando solo l'Energia meccanica, cioè l'energia cinetica + l'energia potenziale.

E stiamo considerando un sistema "isolato", cioè non sottoposto a forze esterne.

Il fatto che l'energia sia costante – nel tempo – posso scriverlo in due modi equivalenti, infatti:

$$\mathbf{E = E_c + E_p = K + U = costante\ (nel\ tempo)}$$

Questo vuol dire che l'Energia calcolata in un certo istante t_1 sarà uguale a quella calcolata in un altro istante t_2, in formule:

$\mathbf{E(t_1) = E(t_2)}$ che posso scrivere così: $\mathbf{E(t_2) - E(t_1) = 0}$ cioè: $\mathbf{\Delta E = 0}$

…La variazione di Energia di un sistema isolato è nulla. Questa legge è molto comoda, abbiamo stabilito che, dato un sistema, posso calcolare una certa grandezza, e che questa rimarrà costante nel tempo …"qualunque cosa accada". Vedremo come, per mantenere la legge in questa forma, dovremo aggiungere altri pezzi alla grandezza "Energia", man mano che scopriremo qualcosa di nuovo. Il caso della grandezza "Energia" è un caso particolare nell'ambito delle leggi/grandezze che vengono cambiate nel tempo. Alcune leggi, con il procedere delle conoscenze e delle misure, si dimostrano approssimate e fondamentalmente "sbagliate", dovendo essere sostituite da una nuova teoria completamente diversa. Un esempio è la Legge di Gravitazione Universale di Newton che verrà sostituita dalla Teoria della Relatività Generale di Einstein, rimanendo valida per calcoli "semplici" e approssimati. Nel caso dell'Energia invece quello che succederà è che, man mano che si andrà avanti nel tempo e nello sviluppo di nuove teorie, si aggiungeranno sempre nuovi "pezzi" alla grandezza Energia. Mantenendo il carattere di un "numero" associato ad un sistema che resta costante nel tempo.

---

definizione di Forza era ancora in discussione, ma l'utilizzo che ne fa Hooke, intesa come forza statica, è assolutamente corretto.

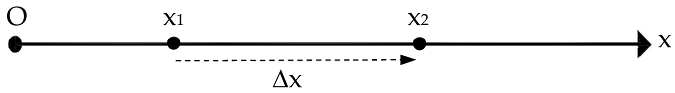
[32] Anche questa ottenibile con un semplice calcolo: $U(x) = \int_0^z kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2$

2.11.Nota matematica # 1

2.11.1. Il significato di variazione di una grandezza

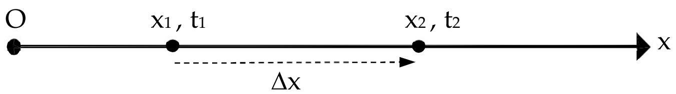
Con il simbolo Δg si indica la variazione della grandezza g.
Se scrivo Δx, per esempio, intendo la variazione della grandezza x, dove per variazione si intende, se non specificato altrimenti, il valore finale meno quello iniziale.
E' evidente quindi che il concetto di variazione di una grandezza presuppone il concetto di tempo.
Quindi se il corpo che sto descrivendo si è spostato dal punto x_1 al punto x_2, la variazione di x sarà:

$$\Delta x = x_f - x_i = x_2 - x_1$$



2.11.2 Il significato di variazione di una grandezza in funzione di un'altra

Se ho due grandezze che stanno variando contemporaneamente, posso essere interessato a sapere come varia la prima al variare della seconda. Molto spesso, ma non necessariamente, la seconda variabile è semplicemente il tempo.
Il caso più semplice è quello della posizione, in cui sono interessato non solo alla variazione della posizione, ma anche alla variazione dell'intervallo di tempo (cioè della variazione del tempo, in cui essa è avvenuta). Con "variazione del tempo" si intende la misura dell'intervallo di tempo, quindi la differenza fra l'istante iniziale e l'istante finale.
Per "tempo" si intende sempre il numero letto su di un orologio che sta fermo nel sistema di riferimento usato.
Se inserisco anche la variabile tempo posso considerare il corpo che si trovava nel punto x_1, all'istante t_1, e nel punto x_2 all'istante t_2.



In questo caso la variazione di x sarà, come prima: $\Delta x = x_f - x_i = x_2 - x_1$
*Mentre la relativa variazione di **t** sarà:* $\Delta t = t_f - t_i = t_2 - t_1$

2.11.2. La velocità media

La velocità, la grandezza che ci dice quanto siamo "veloci", è una misura di quale sia la variazione della grandezza "spazio percorso" in funzione della grandezza "tempo trascorso" per un corpo che si muove nello spazio.

Per esempio: se mi sposto di 5 km in 1 ora, dirò che sono andato a 5 km/ora (in media). In maniera più formale, supponendo di essere passato dalla posizione x_1 al tempo t_1, alla posizione x_2 al tempo t_2, posso scrivere l'espressione della velocità media, cioè la variazione dello spazio percorso diviso per il tempo trascorso:

$$v = \langle v \rangle = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo trascorso}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

*Questa è una velocità **media** [quando si vuole indicare il valore medio di una grandezza "**g**" la si scrive così: **<g>**] effettuata nell'intervallo di tempo Δt: per esempio se ho percorso 5 km in 1 ora, potrei essermi mosso sempre a 5 km/ora, oppure essere andato per la prima mezz'ora più veloce, poi più lento.*
*Se voglio invece un'indicazione della velocità **istantanea,** cioè della velocità che un corpo ha **in un certo istante t,** devo utilizzare l'operazione matematica di "derivata".*

2.11.3. Il significato di "derivata" di una grandezza

La derivata di una grandezza (per esempio x), in funzione di un'altra grandezza (per esempio il tempo) indicata con $\frac{dx}{dt}$, è il valore del rapporto $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quando l'intervallo Δt diventa molto piccolo, al limite quando questo intervallo tende a zero.
Formalmente si scrive:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

2.11.4. Significato geometrico

Geometricamente la derivata viene dall'idea di trovare un'espressione per la variazione di una grandezza in funzione di un'altra, quando le due grandezze sono disegnate in un grafico a due dimensioni, in cui ho le due variabili riferite ai due assi (in genere, ma non necessariamente, ortogonali).

Per esempio, supponendo di disegnare una serie di grafici in cui sull'asse orizzontale ho il tempo, e sull'asse verticale ho lo spazio percorso, posso disegnare varie rette a seconda della velocità con cui si sta muovendo il corpo che studiamo.

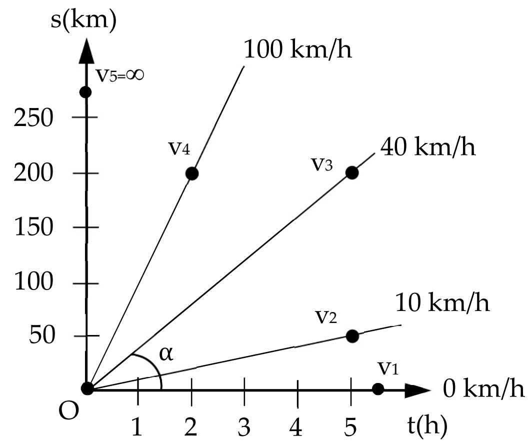


Fig. 2.1 Piano spazio-tempo con indicate 5 leggi orarie s(t), con le velocità v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

Nella figura 2.1 sono state disegnate 5 rette che rappresentano 5 percorsi fatti ognuno a velocità costante. La velocità si può calcolare facilmente facendo, per ogni retta, il rapporto:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

v_1 = il corpo sta fermo, quindi rimane nella stessa posizione al passare del tempo, quindi v=0 km/h
v_2 = il corpo ha percorso 50 km in 5 ore, quindi v= 50 km/5 ore = 10 km/h.
v_3 = il corpo ha percorso 200 km in 5 ore, quindi v=200 km/5 ore = 40 km/h.
v_4 = il corpo ha percorso 200 km in 2 ore, quindi v=200 km/2 ore = 100 km/h.

v_5= il corpo si sposta di Δs in un tempo uguale a zero, quindi la velocità v= ∞ (infinito) perché avrei un numero (Δs) diviso zero.

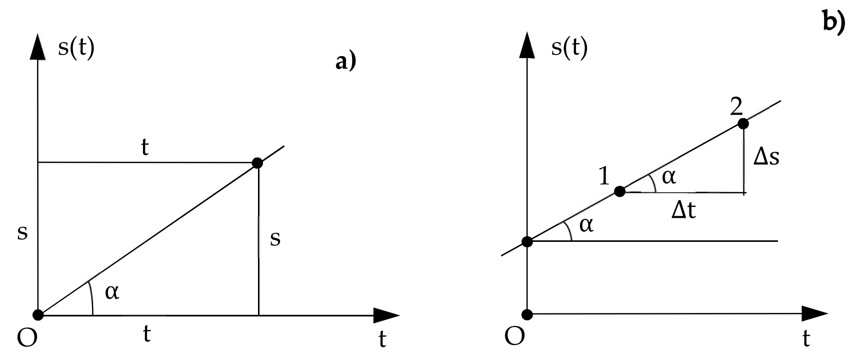


Fig. 2.2 a) Legge oraria rettilinea, angolo α fra s e t. b) Calcolo di tanα dalla legge oraria

Dal punto di vista geometrico cosa potrei assumere come misura della velocità? Consideriamo un corpo che si muove con una legge oraria s(t) con un andamento rettilineo (vedi figura 2.2.a)
Si potrebbe pensare di assumere come misura della velocità l'angolo α fra la retta che descrive il moto e l'asse delle x. Come proporzionalità va bene: se l'angolo aumenta, allora aumenta anche la velocità, ma avrei problemi per il moto verticale (v_5) in cui $\alpha = 90°$ *ma* $v = \infty$.

Conviene utilizzare la tangente dell'angolo α: tan α. Infatti nei due casi limite (velocità zero e velocità ∞) ho:

$v = 0$	$\alpha = 0$	$\tan\alpha = 0$
$v = \infty$	$\alpha = 90°$	$\tan\alpha = \infty$

Dalla trigonometria ho infatti che:

$$s = t \cdot \tan\alpha, \text{ cioè } \frac{s}{t} = \tan\alpha$$

Questo rapporto resta costante per ogni tratto della retta, perché dipende solo dalla pendenza della retta. Se l'angolo α resta costante, allora resta costante anche il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, cioè la velocità.

$$v = \tan\alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Quindi la velocità non è niente altro che la "pendenza" della retta s(t).

2.11.6 Come si calcola la velocità in un istante (punto) t?*

…e se invece di una retta avessi una curva? Cioè se la pendenza, quindi la velocità dell'oggetto, cambiasse istante per istante?
Posso considerare un "piccolo" tratto della curva e calcolare il rapporto $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:

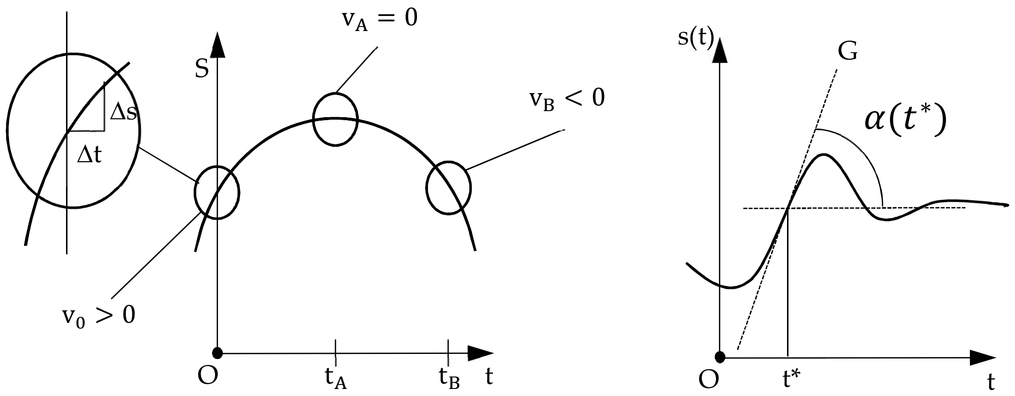


Fig. 2.3 Calcolo geometrico della velocità in un punto come rapporto di ($\Delta s/\Delta t$ per $\Delta t \to 0$) = tan α(t).

$$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} = \left[\frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}}\right]_{\Delta\mathrm{t\ molto\ piccolo}}$$

Se faccio tendere a zero il tratto Δt, *allora ho quella che si chiama la "derivata" di s fatta rispetto a t, che ci dice quanto vale istante per istante il rapporto fra le due, in questo caso la velocità.*

$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}$ = derivata di s rispetto a t

Come posso calcolare la velocità all'istante t?*

1) *Disegno la tangente "geometrica" [G] in t*.*
2) *La tangente geometrica farà un angolo α con l'asse orizzontale.*
3) *Calcolo la tangente trigonometrica dell'angolo α:*

tan α(t*) = $\left[\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}\right]_{t=t^*} = v(t^*)$*: questa è la velocità calcolata nel punto t*, che ci dice come sta cambiando la grandezza s(t) in funzione del tempo t, all'istante* t^**, cioè quanto stiamo andando veloci.*
Se la grandezza $v(t^*)$ *è maggiore di zero vuol dire che stiamo andando "avanti", rispetto alla direzione positiva di s, se è minore di zero vuol dire che stiamo tornando indietro.*

2.11.7 L'accelerazione

*Come la velocità era una misura di quanto velocemente variava la posizione di un corpo in funzione del tempo, analogamente l'accelerazione **a** è una misura di quanto velocemente varia la velocità in funzione del tempo:*

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1} = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}}$$

*se la velocità **v** è costante, l'accelerazione **a** sarà uguale a 0.*

Per il calcolo dell'accelerazione in un istante t, vale lo stesso discorso fatto per la velocità:

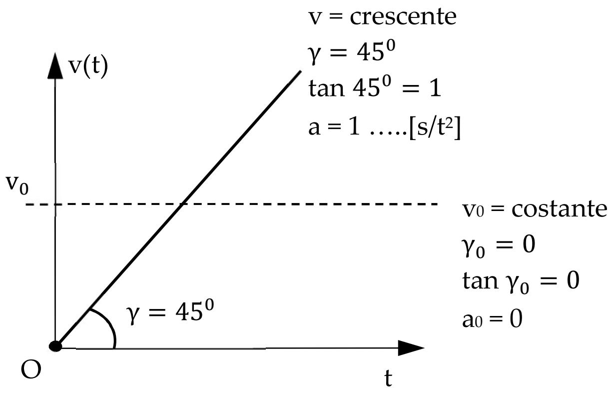


Fig. 2.4 Calcolo geometrico dell'accelerazione per due leggi orarie, una con velocità crescente ed una con velocità costante

$$a(t) = \tan\gamma = \frac{dv}{dt}$$

Nella figura 2.4 sono mostrati due percorsi, uno orizzontale, con velocità costante e quindi accelerazione nulla, ed un altro con velocità crescente, quindi con accelerazione maggiore di zero.